ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

--------------------🕮--------------------

SHERLOR NENGZE

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH MONGE-AMPÈRE PHỨC TRONG CÁC LỚP NĂNG LƯỢNG ĐA PHỨC CÓ TRỌNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

----------------🕮----------------

SHERLOR NENGZE

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH MONGE-AMPÈRE PHỨC TRONG CÁC LỚP NĂNG LƯỢNG ĐA PHỨC CÓ TRỌNG

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Phạm Hiến Bằng

THÁI NGUYÊN-2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả

Sherlor Nengze

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Việt Nam dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu Trường THPT Lào - Việt nam (Thủ đô Viêng Chăn) cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 05 năm 2017

Tác giả

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Toán tử Monge-Ampère phức cho lớp hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương, một khái niệm đóng vai trò quan trọng trung tâm trong lý thuyết đa thế vị đã được E. Berfod và B.A. Taylor xây dựng năm 1982. Từ đó trở đi lý thuyết này liên tục phát triển và đạt được nhiều kết quả quan trọng, đồng thời tìm thấy nhiều ứng dụng vào các lĩnh vực khác nhau của toán học.

Năm 1998, Cegrell đã định nghĩa các lớp năng lượng $\mathcal{E}_0(\Omega), \mathcal{F}_p(\Omega), \mathcal{E}_p(\Omega)$ trên đó toán tử Monge-Ampère phức là xác định. Năm 2004, Cegrell đã định nghĩa các lớp $\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{F}(\Omega)$ và chỉ ra rằng lớp $\mathcal{E}(\Omega)$ là lớp hàm định nghĩa tự nhiên của toán tử Monge-Ampère phức. Đó là lớp hàm lớn nhất trên đó toán tử Monge-Ampère xác định, liên tục dưới dãy giảm các hàm đa điều hòa dưới. Tiếp tục mở rộng lớp năng lượng $\mathcal{F}(\Omega)$, năm 2009, S. Benelkourchi đã đưa ra lớp năng lượng có trọng $\mathcal{E}_c(\Omega)$ và nghiên cứu toán tử Monge-Ampère trên lớp năng lượng đa phức hữu hạn trong trường hợp tổng quát. Đồng thời giải thích các lớp này theo nghĩa tốc độ giảm của dung lượng của tập mức dưới và mô tả đầy đủ miền giá trị của toán tử Monge-Ampère $(dd^c.)^n$ trong các lớp $\mathcal{E}_c(\Omega)$. Nghiên cứu các lớp này dẫn đến nhiều kết quả như nguyên lý so sánh, giải bài toán Dirichlet,…

Với mong muốn tìm hiểu sâu hơn về toán tử Monge-Ampère và áp dụng các kết quả đạt được trong việc giải bài toán Dirichlet trong lớp năng lượng có trọng, chúng tôi chọn "*Sự tồn tại nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức trong các lớp năng lượng đa phức có trọng*" làm đề tài nghiên cứu của mình.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu các lớp năng lượng đa phức có trọng và sự tồn tại nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức trong các lớp đó

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

+ Trình bày tổng quan và hệ thống một số kết quả cơ bản của lý thuyết đa thế vị phức.

+ Trình bày lại một cách chi tiết một số kết quả của S. Benelkourchi về sự tồn tại nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức trong các lớp năng lượng đa phức có trọng.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng phương pháp của lý thuyết đa thế vị phức.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 43 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo. Nội dung của luận văn được viết chủ yếu dựa trên các tài liệu [1] và [5].

Chương 1. Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, toán tử Monge-Ampère và nguyên lý so sánh.

Chương 2. Là nội dung chính của luận văn. Phần đầu của chương trình bày một số khái niệm và kết quả về các lớp năng lượng và các lớp năng lượng có trọng trong £^{n}. Tiếp theo trong mục 2.2 nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức trong lớp $E_c(W)$ (Định lý 2.2.1). Mục 2.3 trình bày kết quả về sự tồn tại nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức trong lớp $\mathcal{E}_c(f)$(Định lý 2.3.6 và Hệ quả 2.3.7). Cuối cùng mục 2.4. trình bày sự tồn tại nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức trong lớp $\mathcal{F}(f)$(Định lý 2.4.1 và Hệ quả 2.4.2).

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1

CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Hàm đa điều hoà dưới

Địng nghĩa 1.1.1. *Giả sử* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *là tập mở,* $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ *là hàm nửa liên tục trên, không đồng nhất bằng* $-\infty$ *trên moi thành phần liên thông của* Ω. *Hàm* u *gọi là đa điều hoà dưới trên* Ω *(viết* $u \in PSH(\Omega)$*) nếu với mọi* $a \in \Omega$ *và* $b \in \mathbb{C}^n$, *hàm* $\lambda \mapsto u(a + \lambda b)$ *là điều hoà dưới hoặc bằng* $-\infty$ *trên mọi thành phần liên thông của tập* $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \Omega\}$.

Định lý sau đây cho một đặc trưng của tính đa điều hoà dưới đối với các hàm lớp C^2 trên tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.

Định lý 1.1.2. *Giả sử* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *là tập mở và* $u \in C^2(\Omega)$. *Khi đó* $u \in PSH(\Omega)$ *khi và chỉ khi Hessian* $H_u(z) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right)$ *của u tại z xác định dương, nghĩa là với mọi* $w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$H_u(z)(w,w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) w_j \bar{w}_k \geq 0.$$

Định nghĩa 1.1.3. *Tập hợp* $E \subset \mathbb{C}^n$ *được gọi là đa cực nếu với mỗi điểm* $a \in E$ *đều có một lân cận* V *của* a *và một hàm* $u \in PSH(V)$ *sao cho* $E \cap V \subset \{z \in V : u(z) = -\infty\}$.

Hệ quả 1.1.4. *Các tập đa cực có độ đo* (*Lebesgue*) *không.*

Dưới đây là một số kết quả liên quan tới tính đa điều hoà dưới khi qua giới hạn và tính lồi của họ các hàm đa điều hoà dưới.

Định lý 1.1.5. *Giả sử* Ω *là tập mở trong* $\mathbb{C}^n$.

$i)$ *Nếu* $u,v \in PSH(\Omega)$ *thì* $\max\{u,v\} \in PSH(\Omega)$ *và nếu* $a,b \geq 0$ *thì* $au + bv \in PSH(\Omega)$. *Nghĩa là* $PSH(\Omega)$ *là nón lồi.*

$ii)$ *Nếu* $\{u_j\}_{j\geq 1} \subset PSH(\Omega)$ *là dãy giảm thì* $u = \lim u_j$ *hoặc là hàm đa điều hoà dưới trên* Ω *hoặc* $\equiv -\infty$.

$iii)$ *Nếu dãy* $\{u_j\} \subset PSH(\Omega)$ *là dãy hội tụ đều trên mọi tập compact của* Ω *tới hàm* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *thì* $u \in PSH(\Omega)$.

$iv)$ *Giả sử* $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset PSH(\Omega)$ *sao cho* $u = \sup\{u_\alpha : \alpha \in I\}$ *là bị chặn trên địa phương. Khi đó chính quy hoá nửa liên tục trên* $u^* \in PSH(\Omega)$.

Chứng minh. Các khẳng định $i)$, $ii)$, $iii)$ suy ra từ định nghĩa 1.1.1. và định lý hội tụ đơn điệu hay định lý qua giới hạn dưới dấu tích phân trong trường hợp dãy hội tụ đều. Ta chứng minh $iv)$. Chỉ cần chứng tỏ $a \in \Omega$, $b \in \mathbb{C}^n$ sao cho $\{a+\lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$ thì

$$u^*(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^*(a + e^{i\theta}b)d\theta$$

Dễ thấy với mọi $z \in \Omega$, $b \in \mathbb{C}^n$ sao cho $\{z+\lambda b, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$ ta có

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^*(z + e^{i\theta}b)d\theta$$